ufc nas escolas
Campus de Russas

Tudo Sobre
MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS DE RUSSAS

INTRODUÇÃO

A disciplina de Matemática no ENEM tem 45 questões que precisam ser bem interpretadas. Portanto, não deixe de ler o enunciado com muita atenção. Neste ebook, as explicações serão mínimas. Vamos nos deter à prática, te explicando exercícios resolvidos!

É importante notar que as questões sempre trazem um contexto. Então, ao ver a questão, você deve ver como a teoria que você vai aprender se encaixa na questão.

O que mais cai no ENEM em Matemática:

- Razão e proporção: regra de três;
- Trigonometria;
- Geometria plana;
- Geometria espacial;
- Matemática financeira;
- Funções;
- Probabilidade e estatística;
- Análise combinatória.

Dicas para ir bem em Matemática:

- Pratique bastante, resolvendo provas anteriores;
- Veja o conteúdo das referências para não precisar decorar tantas fórmulas e entender um pouco a origem delas;
- Veja o tempo que você leva (ideal: 2 h);
- Leia por cima todas as questões e vá resolvendo as fáceis (lendo com novamente com atenção);
- Nas questões que apresentam tabelas e gráficos, preste muita atenção nos eixos e veja se o plano cartesiano está na origem ou deslocado.

RAZÃO E PROPORÇÃO – REGRA DE TRÊS

Relaciona tudo aquilo que pode ser medido (grandezas) através de proporções constantes entre elas, ou seja, dobro, triplo, ¼ e por aí vai.

A regra de três pode ser simples ou composta:

Simples: contém 2 grandezas;

Composta: contém mais de 2 grandezas.

IMPORTANTE: observe a proporção – se é direta (as grandezas crescem ou diminuem uma em relação à outra) ou inversa (uma grandeza cresce dado que a outra diminui).

Proporção direta: montar a regra de três normalmente.

Proporção inversa: inverter uma das frações da regra de três simples ou inverter aquelas que são inversamente proporcionais à fração da incógnita na regra de três composta.

RESOLUÇÃO: Depois de avaliar a proporcionalidade, parte-se para o cálculo.

- A regra de três simples é resolvida escrevendo a fração igual à outra e multiplicando cruzado, fazendo os extremos pelos meios. Basta resolver a equação de 1º grau resultante.
- Já a regra de três composta é calculada escrevendo a fração da incógnita igual ao produto das outras frações.

Nas questões resolvidas, essas ideias vão ficar mais claras.

Questões resolvidas – Razão e proporção

(Enem) Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

• Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;

• Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;

• Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;

• Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;

• Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: www.blog.saude.gov.br. Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é

A) A

B) B

C) C

D) D

E) E

Essa questão é um pouco diferenciada. Para escolher o pão, não basta olhar a quantidade de fibras, tem que ser escolhida a maior proporção, ou seja, o pão que tem mais fibra em relação à sua própria massa. Basta montar as proporções e dividir.

Montando as proporções para cada marca e dividindo (o maior resultado será a maior proporção):

A = 2/50 = 0,04 B = 5/40 = 0,125 C = 5/100 = 0,05 D = 6/90 = 0,07 E = 7/70 = 0,1

O maior resultado foi da marca B. Portanto, esse é o pão escolhido.

(Enem) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com $14m^3$ de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m 3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

A) 1,75

B) 2,00

C) 2,33

D) 4,00

E) 8,00

Grandezas: volume de cimento e de concreto (2 grandezas). Juntando as partes, há um total de 7. Assim para cada 7 m³ de concreto (7 partes totais), é utilizado 1 m³ de cimento (1 parte de cimento): essa é a primeira proporção. Como a questão pergunta quanto será utilizado em cimento para produzir 14 m³ de concreto montamos as proporções:

Cimento Concreto

1---7 => Como as grandezas são diretas (quanto mais

X--14 cimento, mais concreto) não é preciso

Fazendo "meio pelos extremos" temos: inverter uma das frações.

7X = 14 X = 2 (resposta)

(ENEM) Um agricultor sabe que a colheita da safra de soja será concluída em 120 dias caso utilize, durante 10 horas por dia, 20 máquinas de um modelo antigo, que colhem 2 hectares por hora. Com o objetivo de diminuir o tempo de colheita, esse agricultor optou por utilizar máquinas de um novo modelo, que operam 12 horas por dia e colhem 4 hectares por hora.

Quantas máquinas do novo modelo ele necessita adquirir para que consiga efetuar a colheita da safra em 100 dias?

A) 7

B) 10

C) 15

D) 40

E) 58

Grandezas: dias, horas/dia, máquinas e hectares/hora. Proporções:

Dias Horas/dia Máquinas Hectares/hora

120------------------10---------------------20----------------------------2

100------------------12---------------------X----------------------------4

Na regra de três composta devemos comparar todas as frações com a fração da incógnita (máquinas), considerando as restantes constantes durante a análise. Assim, se a quantidade de máquinas cresce:

- Os hectares por hora diminuem, pois quanto mais eficiente as máquinas, menos equipamentos serão necessários;
- As horas por dia diminuem, pois quanto mais máquinas, menos tempo é necessário para concluir a colheita;

- Os dias diminuem, pois quanto mais máquinas, menos tempo é necessário para concluir a colheita.

Logo, todas as outras frações que não a da incógnita serão invertidas e resolvemos a regra de três composta normalmente:

$20/X = (100/120)*(12/10)*(4/2)$ $X = 10$ máquinas (Resposta)

TRIGONOMETRIA

Classificação dos triângulos: os triângulos podem ser classificados quanto aos lados e quanto aos ângulos.

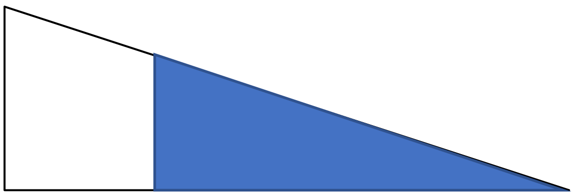
Quanto aos lados:

- <u>Equilátero:</u> possui todos os lados iguais.
- <u>Isósceles:</u> possui 2 lados iguais;
- <u>Escaleno:</u> possui todos os lados diferentes.

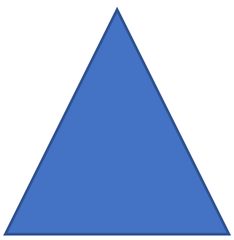
Quanto aos ângulos:

- <u>Acutângulo:</u> possui todos os ângulos agudos (menores que 90º);
- <u>Retângulo:</u> possui o ângulo reto;
- <u>Obtusângulo:</u> possui um ângulo obtuso (maior que 90º).

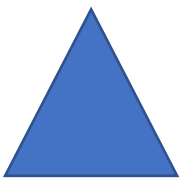
Semelhança de triângulos: ocorre quando triângulos têm ângulos congruentes (ângulos correspondentes iguais) e lados proporcionais.



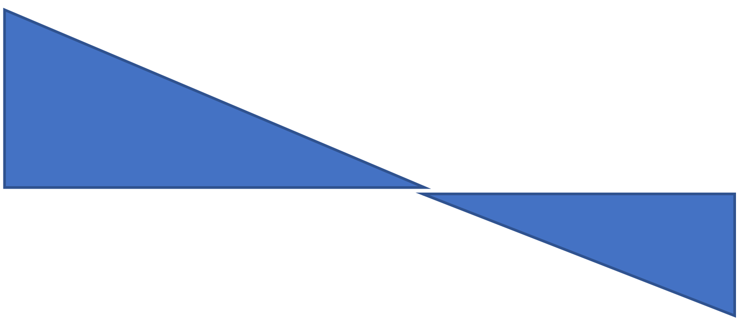
As figuras ao lado ilustram uma situação de semelhança de triângulos.



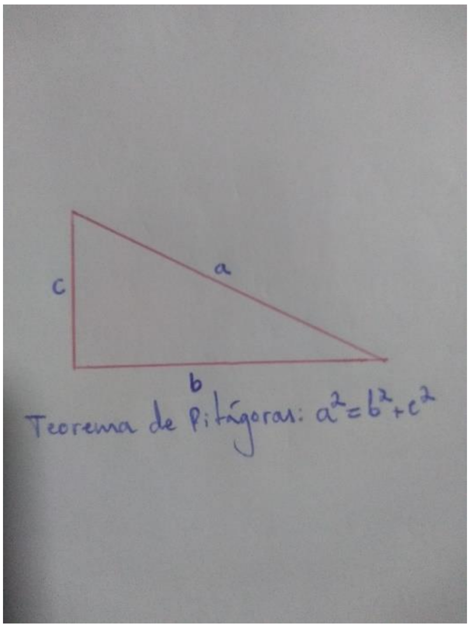
e



OBS: a única diferença entre os triângulos está no tamanho.



Teorema de Pitágoras: a hipotenusa (maior lado) de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos (outros 2 lados), como ilustra a figura.



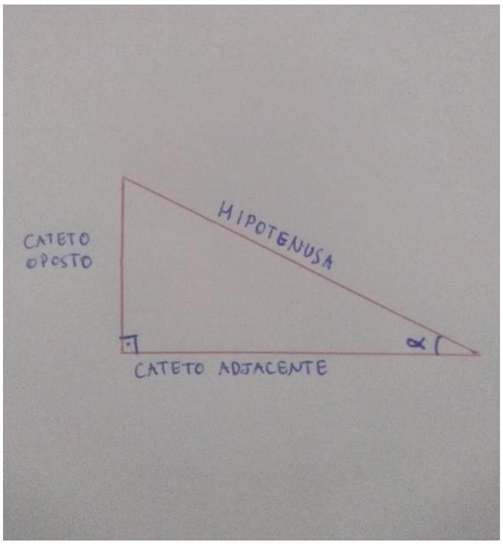
Relações trigonométricas no triângulo retângulo: correspondem ao seno, cosseno e tangente.

OBS: A partir do conhecimento mínimo da medida de um lado e de um ângulo além do reto, essas relações poderão ser usadas.

A partir disso, são assim denominados os lados:

- Hipotenusa: maior lado do triângulo.
- Cateto oposto: cateto que se opõe a α.
- Cateto adjacente: cateto junto ao ângulo α.

A figura a seguir ilustra isso:



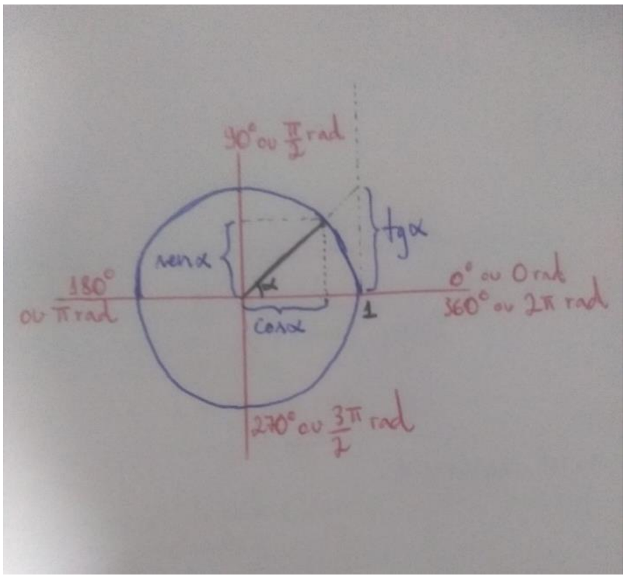
As principais relações trigonométricas são:

Sen α = $\frac{Cateto\ oposto}{Hipotenusa}$ Cos α = $\frac{Cateto\ adjacente}{Hipotenusa}$ Tg α = $\frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente}$

Os valores mais notáveis para α são 30º, 45º e 60º. Veja abaixo a tabela de seno, cosseno e tangente desses ângulos.

	30º	45º	60º
Seno α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Círculo Trigonométrico: é um círculo de raio 1 onde são representadas as funções trigonométricas. No nosso caso, serão tratadas as funções seno, cosseno e tangente.

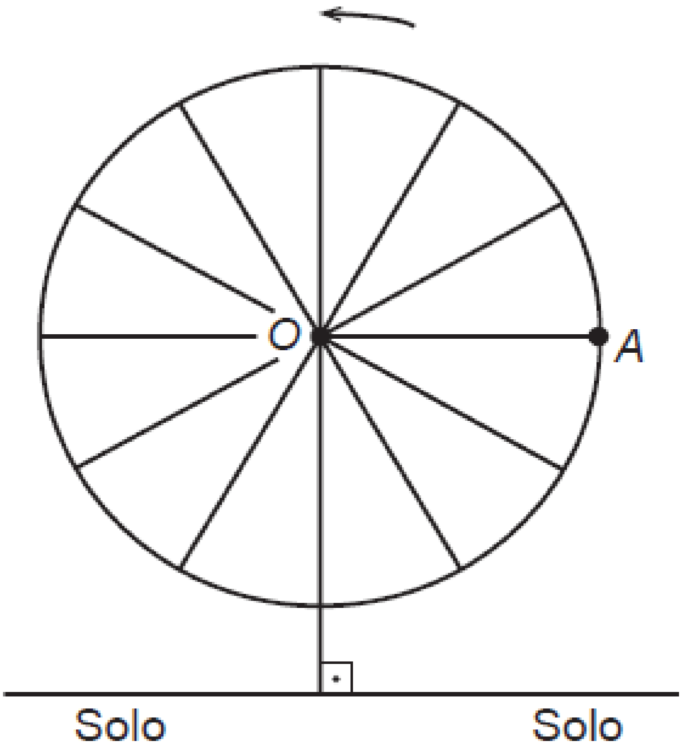


Segue a tabela de funções trigonométricas para seno e cosseno:

	0º ou 0 rad	90º ou π/2 rad	180º ou π rad	270º ou $\frac{3\pi}{2}$ rad	360º ou 2π rad
Seno α	0	1	0	-1	0
Cosseno α	1	0	-1	0	1

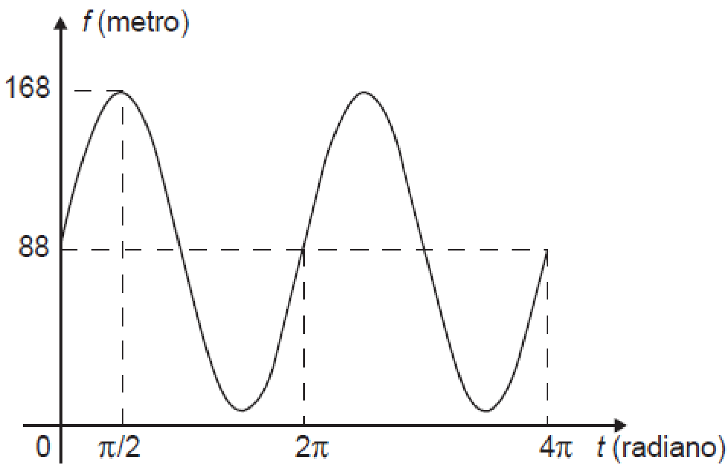
Questão resolvida – Trigonometria

(ENEM) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org.
Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado)

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por

a) f(t) = 80sen(t) + 88

b) f(t) = 80cos(t) + 88

c) f(t) = 88cos(t) + 168

d) f(t) = 168sen(t) + 88cos(t)
e) f(t) = 88sen(t) + 168cos(t)

Resolução completa: https://www.youtube.com/watch?v=J4TlRilPAYE.

GEOMETRIA PLANA

Estuda os polígonos, as unidades da geometria plana. Seguem conceitos fundamentais e as principais relações das figuras para a prova do Enem:

- Os polígonos podem ser côncavos e convexos. Os côncavos são aqueles em que uma reta traçada de um ponto a outro da borda do polígono pode não estar completamente dentro da figura. Caso contrário, o polígono é convexo.

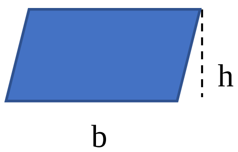
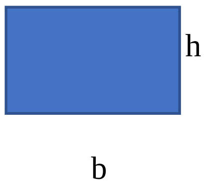
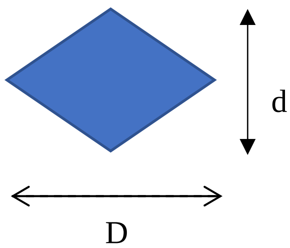
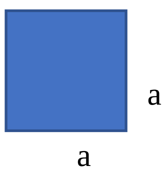
Polígono Equilátero: tem todos os lados iguais.

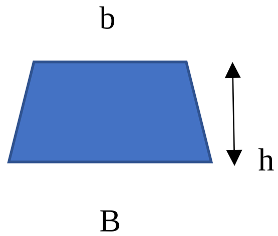
Polígono Regular: tem ângulos e lados iguais.

Perímetro: soma das medidas de todos os lados do polígono.

Área: medida da ocupação interna do polígono.

Quadriláteros: possuem 4 lados. Veja os quadriláteros que mais aparecem na prova:

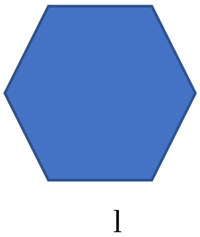
Figura	***Nome***	***Área***
	Paralelogramo	A = b*h
	Retângulo	A = b*h
	Losango	A = $\frac{D*d}{2}$
	Quadrado	A = a²



Trapézio $A = \frac{(B+b)*h}{2}$

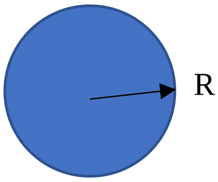
O trapézio pode ser isósceles (caso acima) e retângulo, que possui 2 ângulos retos.

Hexágono: possui 6 lados. O hexágono que mais aparece na prova é o regular:



Hexágono regular $A = \frac{6*l^2*\sqrt{3}}{4}$

Círculo e circunferência: o círculo corresponde à parte interna e a circunferência corresponde à borda.



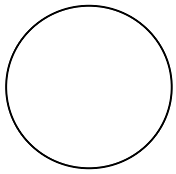
Círculo

$D = 2R$

Comprimento da borda = $2*\pi*R$

Área = $\pi*R^2$

$\pi \approx 3,14$



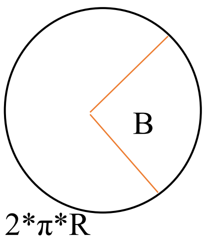
Circunferência

Coroa Circular: é formada por um aro.

Área = Basta fazer a subtração entre a área do círculo maior e a do círculo menor.

As relações restantes vistas anteriormente são válidas para cada círculo.

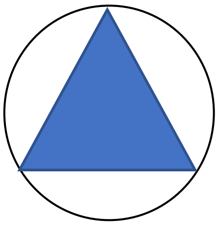
Setor Circular: é uma “fatia” do círculo.



A área e o comprimento do setor circular são calculados por regra de três da seguinte forma:

Área	Comprimento
360º -------------------$\pi*R^2$	360º ---------------------
β------------------------X	β----------------------------X

Polígonos inscritos na circunferência: são aqueles que estão dentro de uma circunferência.

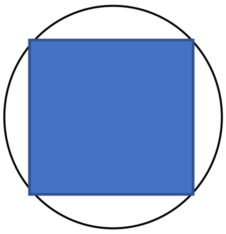


$$R = \frac{l * \sqrt{3}}{3}$$

R é o raio da circunferência

l é o lado do triângulo

Triângulo equilátero inscrito



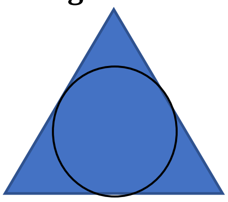
$$R = \frac{l * \sqrt{2}}{2}$$

R é o raio da circunferência

Quadrado inscrito

l é o lado do quadrado

Polígonos circunscritos na circunferência: são aqueles que estão fora da circunferência.

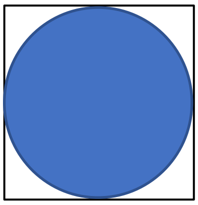


$$R = \frac{l * \sqrt{3}}{6}$$

R é o raio da circunferência

l é o lado do triângulo

Triângulo circunscrito



$$\mathbf{R} = \frac{l}{2}$$

R é o raio da circunferência

l é o lado do quadrado

Quadrado circunscrito

IMPORTANTE: podem aparecer nas provas figuras diferentes destas; nesses casos basta dividir essa figura em figuras de áreas conhecidas e somar ou subtrair essas áreas.

Questão resolvida – Geometria Plana

(ENEM) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

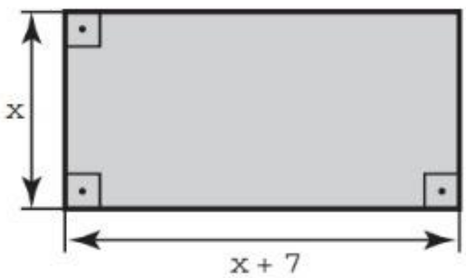


Figura A

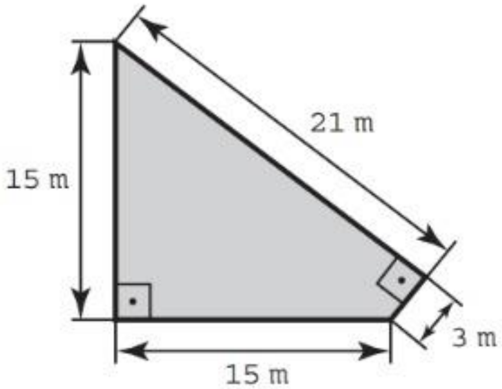


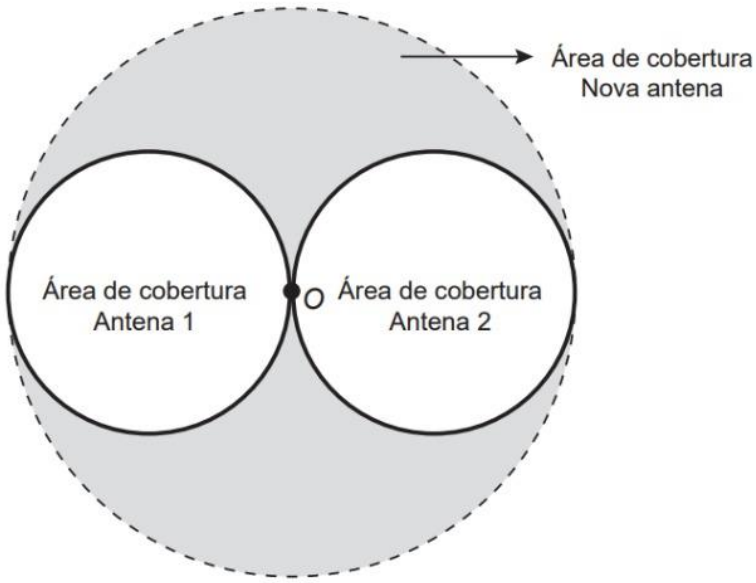
Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

a) 7,5 e 14,5
b) 9,0 e 16,0
c) 9,3 e 16,3
d) 10,0 e 17,0
e) 13,5 e 20,5

Resolução completa: **https://www.youtube.com/watch?v=VYfSOziPzf4**.

(ENEM) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

a) 8 π
b) 12 π
c) 16 π
d) 32 π
e) 64 π

Resolução completa: **https://www.youtube.com/watch?v=bmhSBmYhqKU**.

GEOMETRIA ESPACIAL

O que é mais cobrado no Enem em Geometria Espacial é o volume de sólidos geométricos e as relações entre eles.

De modo geral, o volume de um sólido geométrico é igual ao produto da área da base pela altura; se tiver um afunilamento (pirâmides ou cones), basta dividir esse produto por 3.

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A} * \boldsymbol{h}, para\ prisma$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{A} * \boldsymbol{h}}{\boldsymbol{3}}, para\ cones\ e\ pirâmides$$

- Um prisma é um sólido cujas faces inferior e superior são paralelas e são o mesmo polígono. O prisma pode vir em outras posições na prova.

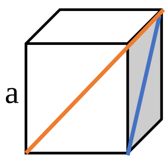
Um sólido importante que não segue essa regra é a esfera, cujo volume é:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{4} * \boldsymbol{\pi} * \boldsymbol{R}^3}{\boldsymbol{3}}$$

Sendo R o raio da esfera.

Outro aspecto importante é a planificação, a partir da qual é possível calcular a área lateral do sólido.

Veja a os principais sólidos cobrados no Enem:



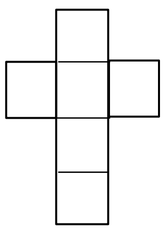
Cubo

$$Volume = a^3$$

$$Área\ planificada = 6 * a^2$$

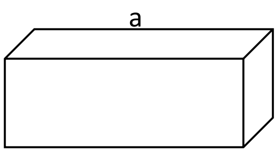
$$Diagonal\ da\ face = a * \sqrt{2}$$

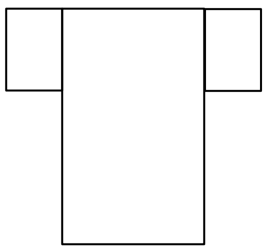
$$Diagonal\ do\ cubo = a * \sqrt{3}$$



Cubo planificado

As diagonais da face e do cubo podem ser calculadas pelo Teorema de Pitágoras (ver a aula nas referências).





b

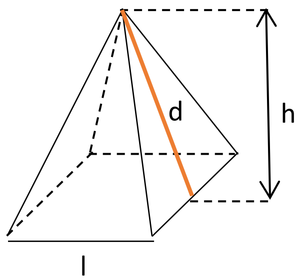
c

Paralelepípedo

$$Volume = a * b * c$$

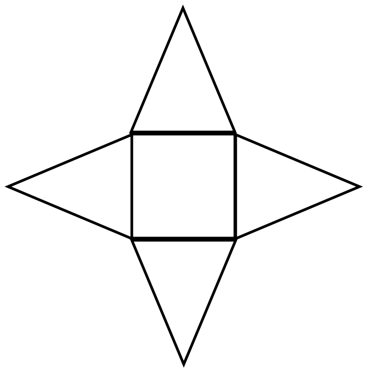
Paralelepípedo planificado

$$Área\ planificada = 2 * a * b + 2 * a * c + 2 * b * c$$



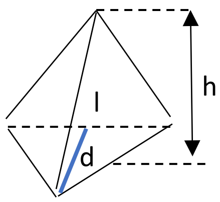
$$Volume = A_{base} * h = l^2 * h$$

$$Área\ lateral = l^2 + \frac{4*l*d}{2}$$



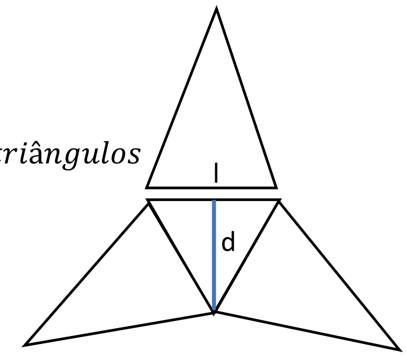
Pirâmide de base quadrada

Pirâmide planificada



$$Volume = A_{base} * h = \frac{l*d}{2} * h$$

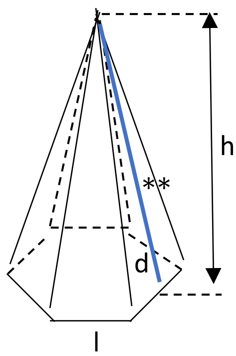
$$Área\ lateral = Área\ do\ 4\ triângulos$$



Pirâmide de base triangular

Pirâmide planificada

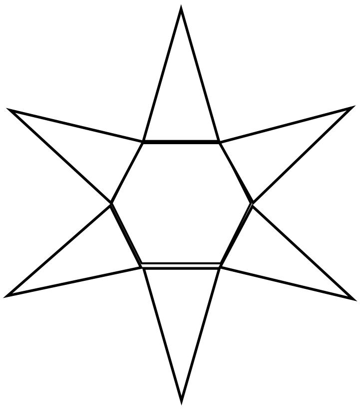
Cuidado: a altura dos triângulos não corresponde à altura da pirâmide!



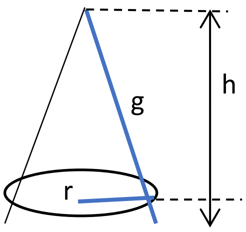
$$Volume = A_{base} * h = \frac{6*l^2*\sqrt{3}}{4} * h$$

$$Área\ lateral = A_{base} + A_{triângulos} = \frac{6*l^2*\sqrt{3}}{4} + \frac{6*l*d}{2}$$

Pirâmide de base hexagonal



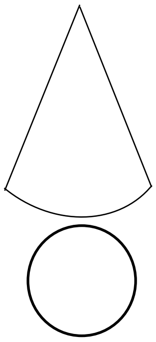
Pirâmide planificada



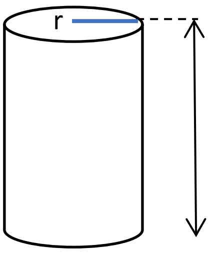
Cone

$$Volume = A_{base} * h = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$$

$$\acute{A}rea\ total = A_{base} + A_{lateral} = \pi * r^2 + \pi * r * g$$



Cone planificado

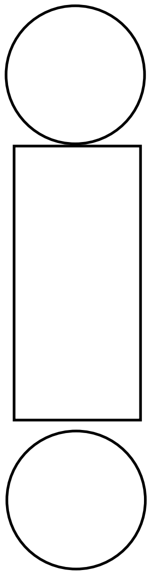


$$Volume = A_{base} * h = \pi * r^2 * h$$

h

$$Área\ total = 2 * A_{base} + A_{lateral} = 2 * \pi * r^2 + 2 * \pi * r * h$$

Cilindro



Cilindro planificado

Questões resolvidas – Geometria Espacial

(ENEM) Uma loja de materiais de construção vende dois tipos de caixas-d’água: tipo A e tipo B. Ambas têm formato cilíndrico e possuem o mesmo volume, e a altura da caixa-d’água do tipo B é igual a 25% da altura da caixa-d’água do tipo A.

Se R denota o raio da caixa-d’água do tipo A, então o raio da caixa-d’água do tipo B é

a) R/2

b) 2R

c) 4R

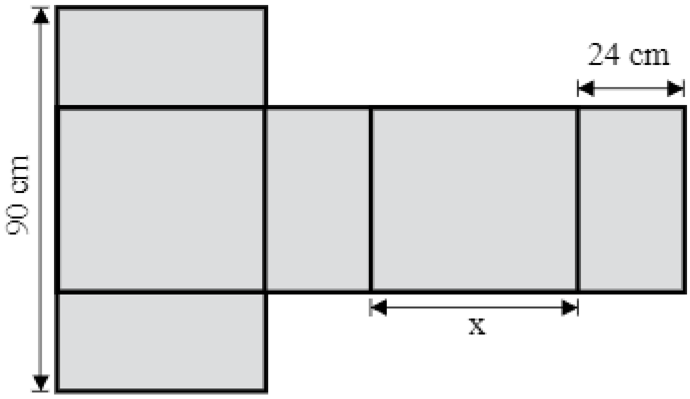
d) 5R

e) 16R

Resolução completa: https://www.youtube.com/watch?v=__jYD2cU0-k.

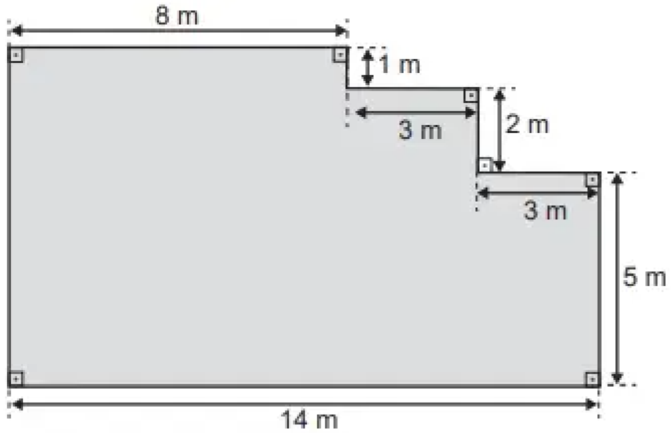
(ENEM) Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a **115 cm**.

A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é
a) 25.
b) 33.
c) 42.
d) 45.
e) 49.
Resolução completa: https://www.youtube.com/watch?v=dO4Qysn4P7c.

(ENEM) Um mestre de obras deseja fazer uma laje com espessura de 5 cm utilizando concreto usinado, conforme as dimensões do projeto dadas na figura. O concreto para fazer a laje será fornecido por uma usina que utiliza caminhões com capacidades máximas de 2 m^3, 5 m^3 e 10 m^3 de concreto.



Qual a menor quantidade de caminhões, utilizando suas capacidades máximas, que o mestre de obras deverá pedir à usina de concreto para fazer a laje?
a) Dez caminhões com capacidade máxima de 10 m^3.

b) Cinco caminhões com capacidade máxima de 10 m^3.
c) Um caminhão com capacidade máxima de 5 m^3.
d) Dez caminhões com capacidade máxima de 2 m^3.
e) Um caminhão com capacidade máxima de 2 m^3.
Resolução completa: https://www.youtube.com/watch?v=3Ooe0_TaNf4.

MATEMÁTICA FINANCEIRA

São tratados nesse conteúdo noções de porcentagem, acréscimo e desconto, lucro e prejuízo, e por fim juros simples e compostos.

Porcentagem:

Toda porcentagem é uma quantidade em relação a 100. Por exemplo, 10% significa 10 em cada 100. A porcentagem pode ser escrita dessas formas:

10% $\frac{10}{100}$ 0,1 (basta dividir 10 por 100)

Para calcular a porcentagem de uma quantidade (por exemplo, 20% de 50), o ideal é expressar a porcentagem na forma de fração e em seguida multiplicar essa fração pelo valor do qual se quer obter a porcentagem.

EX: *Um homem precisa destinar 20% das peças para doação e há 50 peças no depósito. Quantas peças serão doadas?*

Basta calcular 20% de 50: $\frac{20}{100} * 50 = \frac{1000}{100} = 10$

Acréscimo e desconto:

No acréscimo um valor será adicionado a uma quantidade inicial e no desconto haverá uma subtração. Nesse caso, a porcentagem precisa estar em DECIMAL. Considerando:

$P_i = valor\ inicial$ $P = valor\ final$ $i = taxa\ (porcentagem\ em\ decimal)$

$$\text{Fator} = \begin{matrix} 1+i, & acréscimo \\ 1-i, & desconto \end{matrix}$$

Assim:

$$P = P_i * Fator$$

EX1: *Estou fazendo um investimento e coloquei R$ 500,00 na poupança e vi que houve um acréscimo de 1,5% no valor. Quanto há agora na poupança?*

1,5% em decimal é 0,015. Temos que:

$$P = P_i * F = P_i * (1 + i) = 500 * (1 + 0{,}015) = 500 * 1{,}015 = R\$\ 507{,}50$$

EX2: *Fui comprar uma peça de roupa de R$ 120,00 reais, mas comprei à vista e ganhei 5% de desconto. Quanto paguei pela peça?*

5% em decimal é 0,05. Temos que:

$P = P_i * F = P_i * (1 - i) = 120 * (1 - 0{,}05) = 120 * 0{,}95 = R\$\ 114{,}00$

Lucro e Prejuízo

O lucro se refere a um ganho em uma ação de compra e venda e o prejuízo se refere a uma perda. Nomeamos:

$$P_v = preço\ de\ venda\ ou\ ganho \qquad P_c = preço\ de\ custo\ ou\ gasto$$

$Lucro\ (P_v > P_c) = P_v - P_c$

$Prejuízo\ (P_v < P_c) = P_c - P_v$

EX1: *Eu comprei um sofá por R$ 850,00 e o vendi por R$ 1000,00. Eu tive lucro ou prejuízo? De quanto?*

$$P_v = R\$\ 1000{,}00 \qquad P_c = R\$\ 850{,}00$$

Como $P_v > P_c$, tem-se lucro. E o $lucro$ é de $1000 - 850 = R\$\ 150{,}00$

EX2: *Uma empresa gastou R$ 5000,00 com despesas e recebeu R$ 4900,00 em receita. A empresa teve lucro ou prejuízo? De quanto?*

$$P_v = R\$\ 4900{,}00 \qquad P_c = R\$\ 5000{,}00$$

Como $P_v < P_c$, tem-se prejuízo. E o $prejuízo$ é de $5000 - 4900 = R\$\ 100{,}00$

Juros Simples

Ocorre quando há acréscimos sucessivos ao longo do tempo. Esses acréscimos são constantes e somam-se à quantia inicial (capital), formando o montante (M).

$$J = \frac{C * i * t}{100}$$

Sendo J os juros (valor acrescido ou descontado), C o capital (dinheiro aplicado), i a taxa percentual de acréscimo ou desconto por unidade de tempo e t é o tempo, que deve ser igual ao da taxa.

Obs: a porcentagem nesse caso é expressa em seu formato original (EX: 10% é expresso como 10). Calculado o acréscimo total (juros), o montante é calculado por:

$$M = C + J$$

EX: *João investe R$ 2000,00 na poupança, que tem um rendimento de 2% ao mês. Quanto João terá em 2 anos?*

$$C = R\$\ 2000{,}00 \qquad i = 2\%\ a.m\ \ (a.m\text{: } ao\ mês) \qquad t = 24\ meses\ (2\ anos)$$

$$J = \frac{2000 * 2 * 24}{100} = R\$\ 960{,}00$$

O valor que João receberá será o montante: $M = C + J = 2000 + 960 = \boldsymbol{R\$\,2960,00}$

Juros Compostos

Neste caso, há acréscimos sucessivos, mas não são constantes: são sempre calculados em relação ao valor anterior. Após cada acréscimo, tem-se um novo capital.

$$\boldsymbol{M = C * (1 + i)^t}$$

Em que M é o montante, C é o capital, i é a taxa e t é o tempo.

OBS1: o tempo deve ser o mesmo do tempo da taxa (Ex: se a taxa estiver ao mês, o tempo precisa estar em meses).

OBS2: a taxa deve estar em decimal (Ex: 3% deve ser expresso como 0,03).

Caso seja pedido o valor dos juros, basta calcular:

$$\boldsymbol{J = M - C}$$

EX: *Maria investiu R$ 5000,00 na poupança, que rende 0,2% ao dia a juros compostos. Quanto será acrescido em 3 meses?*

$$C = R\$\,5000,00 \qquad i = 0,2\%\ a.d = 0,002 \qquad t = 90\ dias\ (3\ meses)$$

Calculando o montante: $M = C * (1 + i)^t = 5000 * (1 + 0,002)^{90} = R\$\,5985,01$

Calculando o valor acrescentado (juros): $J = M - C = 5985,01 - 5000,00 = \boldsymbol{R\$\,985,01}$

Questão resolvida – Matemática financeira

(ENEM) Um empréstimo foi feito à taxa mensal de i%, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P.

O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é:

(A) $P\left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$

(B) $P\left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)}\right]$

(C) $P\left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right]$

(D) $P\left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{3i}{100}\right)}\right]$

(E) $P\left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^3}\right]$

RESPOSTA: A

Resolução completa: **https://www.youtube.com/watch?v=tqtWDnuvOMA.**

(ENEM) Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180000,00, a ser pago em **360** prestações mensais, com taxa de juros efetiva de **1%** ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juro de **1%** sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de.

a) 2 075,00.
b) 2 093,00.
c) 2 138,00.
d) 2 255,00.
e) 2 300,00.
Resolução completa: **https://www.youtube.com/watch?v=uS5qiWkbLa8.**

FUNÇÕES

O Enem cobra principalmente a lei de formação de funções, comportamento gráfico e valores específicos dessas funções. As funções mais cobradas são as de 1º grau, 2º grau, exponencial e logarítmica.

Dado o plano cartesiano, uma função relaciona valores em x e y: de acordo com o valor de x, tem-se o valor de y pela lei de formação da função (Ex: dada a função y=2x+1, se eu considerar x=1, y será 3, pois y=2*1+1=3).

Função do 1º grau ou função afim

É assim chamada porque a variável "x" está elevada a 1. É da forma $y = ax + b \; ou$

$f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e $a \neq 0$.

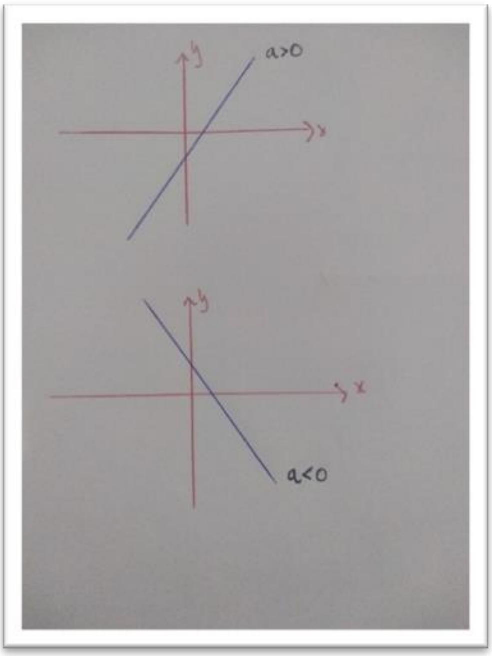
O gráfico dessa função é uma reta.

- Se a>0: reta crescente.
- Se a<0: reta decrescente.

O valor onde o gráfico toca o eixo y é o valor de b.

O valor onde o gráfico toca o eixo x é chamado de raiz ou zero da função, e é calculado fazendo y=0 ou f(x)=0.

Para determinar a lei de formação da função (valores de a e b), basta ter conhecimento de 2 pontos, ou seja, dois pares (x,y). A partir disso, monte e resolva o sistema de equações.



Gráficos de função do 1º grau

Função do 2º grau

É assim chamada porque contém a variável “x” elevada ao quadrado. É da forma

$f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a, b e c números reais, com $a \neq 0$.

O gráfico é uma parábola, condicionada da seguinte forma:

- a>0: concavidade para cima; a<0: concavidade para baixo.
- b>0: gráfico cruza o eixo y no sentido ascendente; b<0: gráfico cruza eixo y no sentido descendente; b=0: gráfico cruza o eixo y horizontalmente.
- c é o valor no qual o gráfico cruza o eixo y.
- Os valores no qual o gráfico toca o eixo y corresponde às raízes da função, que são obtidas igualando a função a 0 e resolvendo a equação de 2º grau.
- Se Δ>0, haverão 2 raízes reais e distintas; se Δ<0, não haverá raiz real (gráfico não intercepta o eixo x); se Δ=0, haverá 2 raízes iguais (gráfico intercepta o eixo x apenas uma vez). Em que $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4 * \mathrm{a} * \mathrm{c}$.

Um aspecto importante cobrado no Enem são as coordenadas de máximo ou mínimo da função, correspondentes ao X_v $(x\ do\ vértice)$ e Y_v $(y\ do\ vértice)$.

$$X_v = \frac{-b}{2 * a} \qquad\qquad Y_v = \frac{-\Delta}{4 * a}$$

Dica: esse tipo de problema aparece em um contexto tendo uma função do 2º grau que relaciona 2 grandezas. Alguns exemplos:

- <u>Lucro = f(preço):</u> X_v dará o preço de lucro máximo e Y_v será o lucro máximo.
- <u>Altura = f(comprimento):</u> X_v dará o comprimento para obter a altura máxima Y_v dará a altura máxima.

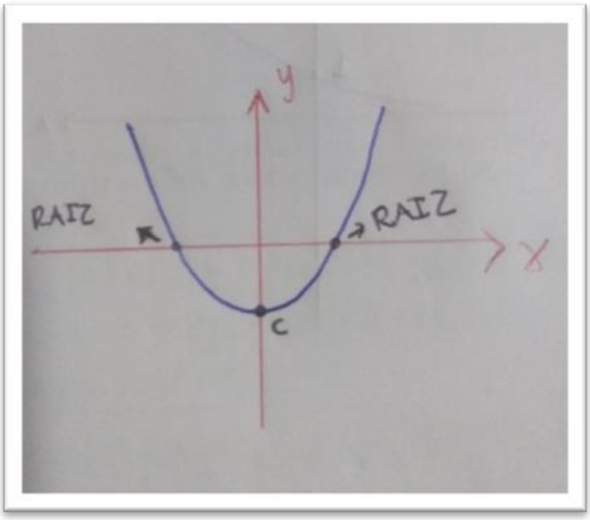
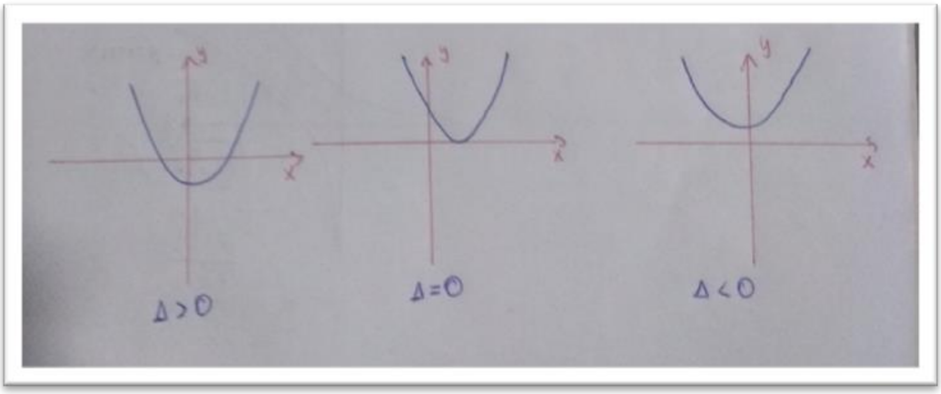


Gráfico da função do 2º grau.



Gráficos da função do 2º grau de acordo com o Δ.

Função Exponencial

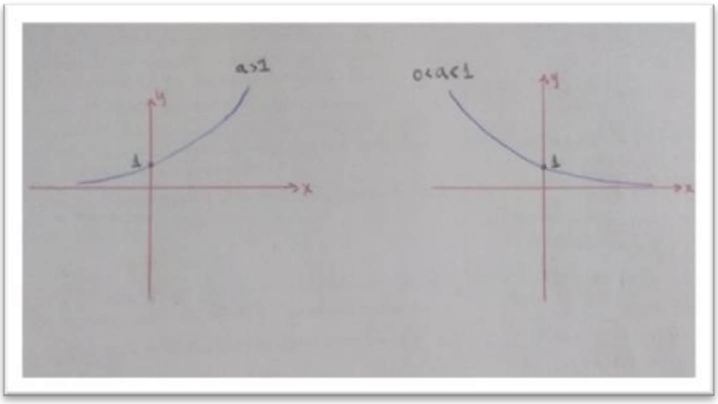
É a função da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real positivo diferente de 0 e 1. Assim, o valor de a vai estar nessas faixas:

- $0 < a < 1$: a função é decrescente;
- $a > 1$: a função é crescente.

EX: $f(x) = 2^x$ $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $f(x) = (0{,}3)^x$

Crescente Decrescente, pois $1 \div 5 = 0{,}2$ Decrescente

$(a > 1)$ $(0 < a < 1)$ $(0 < a < 1)$



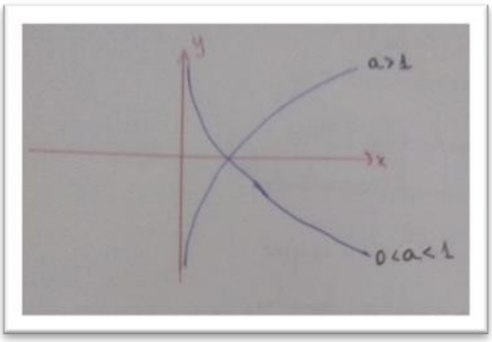
Gráficos da função exponencial de acordo com o valor de a

Função Logarítmica

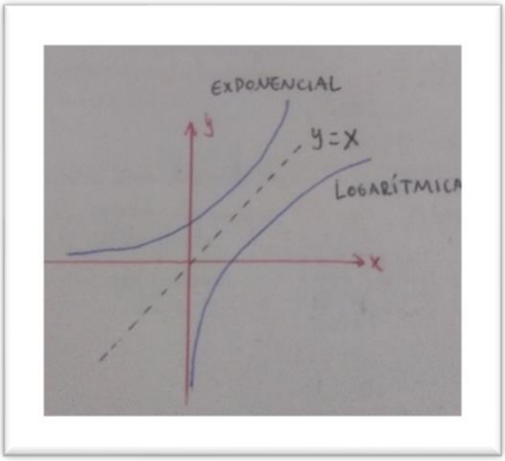
É a inversa da função exponencial e apresenta a forma $log_a\, x$, em que a é um número real positivo e diferente de 0 e 1, e x é um número real positivo e diferente de zero ($x > 0$). Assim como no caso da função exponencial, há duas possibilidades para a base da função logarítmica:

- $0 < a < 1$: a função é decrescente;
- $a > 1$: a função é crescente.

EX:	$f(x) = log_2\, x$	$f(x) = log_{\left(\frac{1}{4}\right)}\, x$	$f(x) = log_{0,2}\, x$
	Crescente	Decrescente, pois $1 \div 4 = 0{,}25$	Decrescente
	$(\, a > 1)$	$(0 < a < 1)$	$(0 < a < 1)$



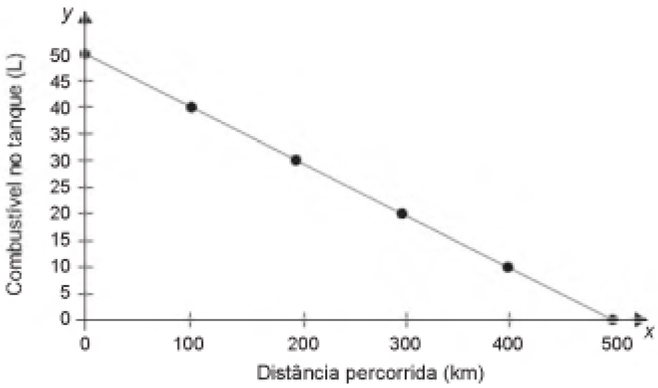
Gráficos da função logarítmica para diferentes valores de a.



As funções exponencial e logarítmica são inversas. Gráficos simétricos em relação à reta y=x.

Questões resolvidas – Funções

(ENEM) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:

$a) y = -10x + 500$

$b) y = \frac{-x}{10} + 50$

$c) y = \frac{-x}{10} + 500$

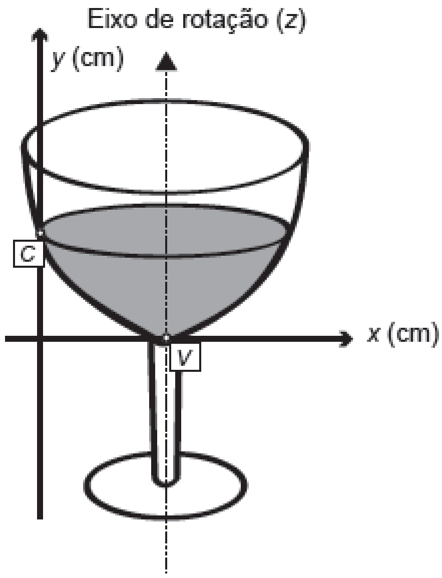
$d) y = \frac{x}{10} + 50$

$e) y = \frac{x}{10} + 500$ RESPOSTA: B

Uma função afim tem o formato $f(x) = ax + b$, sendo b a interseção do gráfico com o eixo y, logo $b = 50$. Para determinar a, basta substituir o par (500,0) na função, já considerando $b = 50$:

$0 = 500a + 50$ $\qquad$ $a = -\frac{50}{500} = -\frac{1}{10}$ $\qquad$ $f(x) = -\frac{x}{10} + 50$

(ENEM) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = 3/2\ x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

A) 1

B) 2

C) 4

D) 5

E) 6

Repare sempre na peculiaridade do gráfico: ele toca uma única vez o eixo X, portanto, há 2 raízes reais e iguais e $\Delta = 0$. Assim:

$\Delta = b^2 - 4 * a * c = (-6)^2 - 4 * \frac{3}{2} * c = 0$

$6 * c = 36$

$c = \frac{36}{6} = 6$

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

A probabilidade no Enem aparece na forma básica, condicional e de eventos simultâneos.

A probabilidade básica é calculada na situação de casos favoráveis em relação ao total.

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ totais}$$

A probabilidade pode ser expressa em formato de fração, decimal e porcentagem. Por exemplo:

P=1/5 P=0,2 P=20%

(dividir numerador pelo denominador) (multiplicar o decimal por 100)

EX: *Há 10 bolas em uma caixa. 3 são pretas, 5 são amarelas e 2 são brancas. Qual a chance de, se eu retirar uma das bolas da caixa, ela ser branca?*

R. Casos favoráveis: 2 bolas brancas

Casos totais: 10 bolas no total

P = 2/10 ou 0,2 ou 20%

Probabilidade condicional

A probabilidade condicional diz respeito à chance de um evento A ocorrer dado que um evento B já ocorreu. Esse evento B pode ser alguma restrição.

$$P\ (A/B)\ =\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

Sendo, n o número de casos, $n(A\cap B)$ o novo número de casos favoráveis de A dado que B ocorreu e $n(B)$ o total de possibilidades com a restrição.

EX: *Considerando a mesma caixa, supondo que se faça um novo sorteio e que a bola retirada antes não seja colocada de volta, qual a chance de sair outra bola branca?*

R. Evento A: 2 bolas brancas

Evento B: Saiu uma bola branca

$n(A\cap B)=2\ bolas\ brancas, pois\ 1\ já\ foi\ retirada$

$n(B)=9\ bolas, pois\ 1\ já\ foi\ sorteada$

$P={}^{2}/_{9}$

Probabilidade de eventos simultâneos

Se refere à probabilidade de 2 eventos ocorrerem simultaneamente. Deve-se neste caso calcular a probabilidade de cada evento e multiplica-las, analisando para cada cálculo se os eventos são dependentes ou independentes (um não afeta a probabilidade do outro).

EX1: *Em dois lançamentos de um dado, qual a probabilidade de ocorrer o número 2 no primeiro lançamento e um número ímpar no segundo?*

R. $P(2)=\frac{1}{6}$ $P(ímpar)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$$P(2, ímpar) = \frac{1}{6} * \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

EX2: *Há 10 bolas em uma caixa numeradas de 1 a 10. Qual a chance de em um sorteio sair uma bola com o número 3 e no segundo sorteio sair uma bola com número ímpar? Não há reposição, ou seja, a bola retirada não é colocada na caixa novamente.*

R. Neste caso os eventos são dependentes, pois a retirada da bola 3 e a não reposição mudam a chance de ser retirada uma bola ímpar.

$P(3) = \frac{1}{10}$ $P(ímpar) = \frac{2}{9}$, 2 bolas ímpares (1 e 5) e 9 bolas no total, pois a bola 3 não foi reposta.

$$P(3, ímpar) = \frac{1}{10} * \frac{2}{9} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

Estatística

Em Estatística você precisa analisar dados em gráficos e tabelas e fazer previsões a partir desses dados. Você também precisa saber medidas centrais e de dispersão. As medidas centrais que caem no Enem são as médias aritmética e ponderada:

$\boldsymbol{Média\ aritmética} = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i}{n}$, em que V_i é um valor qualquer e n é o número de valores.

"*A média aritmética é calculada pela soma de valores dividida pela quantidade desses valores.*"

EX1: *Foi feito um levantamento com 10 estudantes sobre quantos livros cada um leu no ensino médio, obtendo-se o seguinte resultado:*

Ana	Pedro	Mariana	João	Bruno	Mateus	Jorge	Letícia	Andrea	Luciana
8 livros	8 livros	9 livros	5 livros	4 livros	11 livros	11 livros	7 livros	8 livros	9 livros

Qual a quantidade média de livros lidos?

R. Basta somar a quantidade de livros e dividir pela quantidade de alunos:

$$Média = \frac{8+8+9+5+4+11+11+7+8+9}{10} = \frac{80}{10} = 8$$

<u>Interpretação:</u> a média neste caso considera como se cada aluno tivesse lido 8 livros.

$\boldsymbol{Média\ ponderada} = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i * p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$, em que V_i é um valor e p_i é o peso, a importância desse valor.

"A média ponderada é calculada pela soma dos produtos dos valores pelos seus pesos, dividida pela soma dos pesos.

EX2: *Foi feito um outro levantamento que mostrou a quantidade de alunos que leram uma determinada quantidade de livros no ensino médio, obtendo-se o seguinte resultado:*

QUANTIDADE DE ALUNOS	20	30	10	40	10	50	40
QUANTIDADE DE LIVROS	4	5	8	6	9	2	3

Qual a média de livros lidos por aluno?

R. Não basta apenas somar a quantidade de livros e dividir pela quantidade total de alunos, é preciso considerar o peso, a quantidade de alunos que leram uma dada quantidade de livros:

$$Média = \frac{20*1+30*5+10*8+40*6+10*9+50*2+40*3}{20+30+10+40+10+50+40} = \frac{800}{200} = 4\ livros$$

Interpretação: como se cada aluno tivesse lido 4 livros.

OBS: Sobre as medidas de dispersão, as mais cobradas no Enem são o desvio-padrão e a variância. Não é cobrado o cálculo dessas medidas, o que você precisa saber é que quanto mais regulares ("juntos") estão os dados, menor esses valores.

Além das medidas centrais e de dispersão, há as medidas de moda e mediana

- **MODA:** se refere ao valor mais frequente em uma sequência ("o número que mais aparece").
- **MEDIANA:** trata-se do valor central em uma sequência. Os valores são colocados em ordem crescente e é escolhido o "valor do meio". Caso a quantidade de valores seja par, é feita uma média aritmética dos valores dois valores do meio de sequência.

EX3: Calcule a média aritmética, a moda e a mediana da seguinte sequência:

3	5	7	3	10	7	2	5	7	11

R. $Média = \frac{3+5+7+3+10+7+2+5+7+11}{10} = \frac{60}{10} = 6$

$Moda = 7, o\ valor\ que\ mais\ se\ repete\ (3\ vezes)$

$Mediana = colocando\ em\ ordem\ crescente\ a\ sequência:$

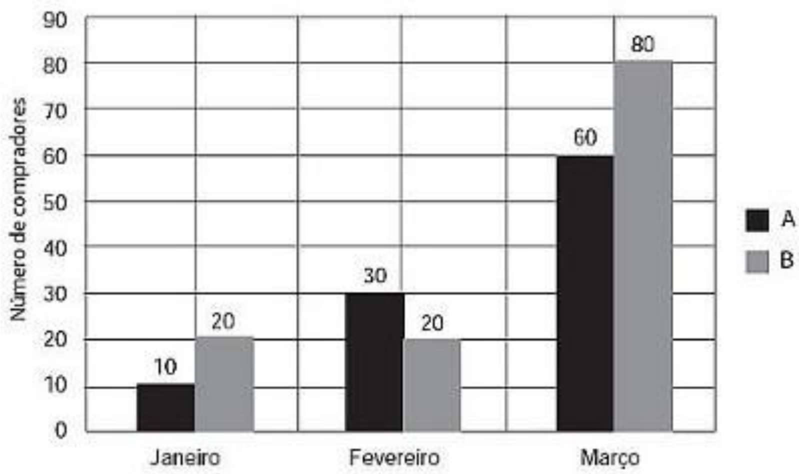
$2-3-3-5-5-7-7-7-10-11$

Como a quantidade de valores é par, devemos tirar a média aritmética entre o 5º e 6º valor, que são 5 e 7 respectivamente. Portanto:

$$Mediana = \frac{5+7}{2} = 6$$

Questão resolvida – Probabilidade

(ENEM) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

a) $\frac{1}{20}$

Trata-se da probabilidade simultânea, pois há dois eventos dos quais se quer Calcular a probabilidade: O sorteio do comprador do produto A e do B.

b) $\frac{3}{242}$

$$P(A) = \frac{Compras\ de\ A\ em\ fevereiro}{Compras\ de\ A\ nos\ 3\ meses} = \frac{30}{10+30+60} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

c) $\frac{5}{22}$

$$P(B) = \frac{Compras\ de\ B\ em\ fevereiro}{Compras\ de\ B\ nos\ 3\ meses} = \frac{20}{20+20+80} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

d) $\frac{6}{25}$

e) $\frac{7}{15}$

$$P(A\ e\ B) = \frac{3}{10} * \frac{1}{6} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

Questão resolvida – Estatística

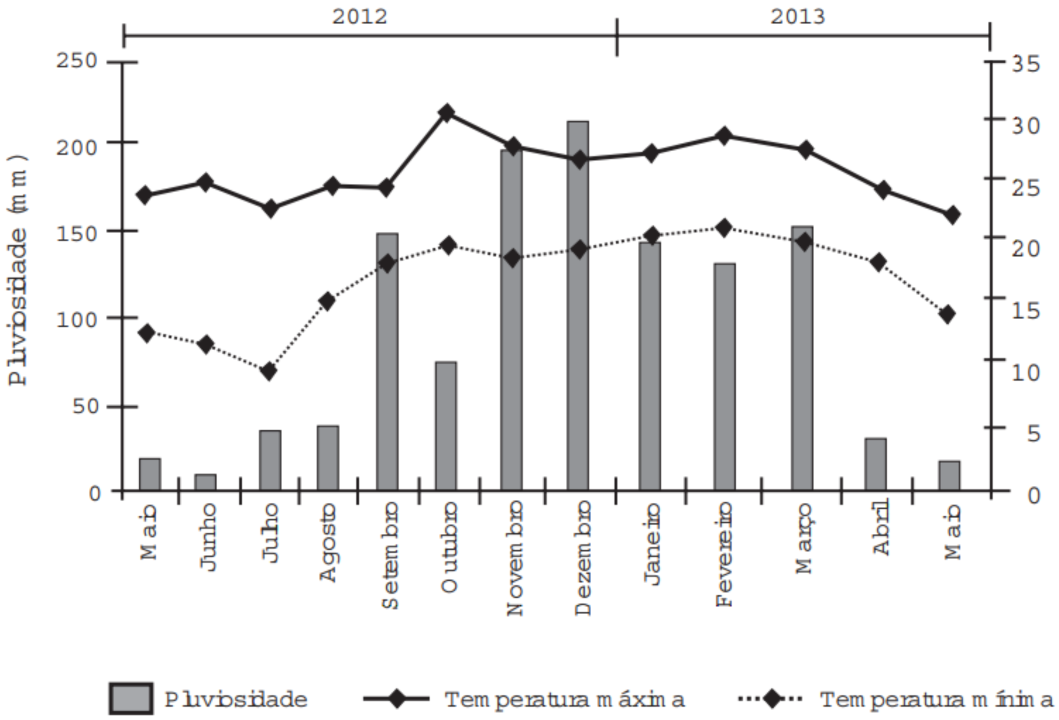
(ENEM) O cultivo de uma flor rara só é viável se, do mês do plantio para o mês subsequente, o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

• a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;

• a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15 °C;

• ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5 °C na temperatura máxima.

Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.



Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara.

O mês escolhido para o plantio foi:

A) janeiro — Basta observar o gráfico, analisando cada critério separadamente e

B) fevereiro — Anotar os meses que obedecem a cada um.

C) agosto

D) novembro

E) dezembro

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Analisa as possibilidades de combinação entre elementos. O ENEM geralmente cobra que, a partir de um problema contextualizado, você consiga apontar a expressão que modela o problema. Essa expressão pode usar o Princípio Fundamental da Contagem, a permutação, o arranjo e a combinação.

Princípio Fundamental da Contagem: é a multiplicação das maneiras pelas quais você pode tomar n decisões.

EX: *Em um cardápio há 4 opções de entrada, 5 opções de prato principal, 5 opções de suco e 3 de sobremesa. De quantas formas é possível fazer uma refeição?*

R. Decisões: entrada, prato principal, suco e sobremesa.

Maneiras: opções.

$Formas = 4 * 5 * 5 * 3 = 300\ maneiras\ de\ fazer\ a\ refeição.$

Permutação: calcula de quantas formas eu posso alocar n elementos em um conjunto finito.

$$P_n = n!$$

n! (lê-se n fatorial) é a multiplicação de n pelos seus antecessores, até 1 (ex: 3! = 3*2*1 = 6)

EX: *De quantas maneiras diferentes eu posso alocar as letras da palavra "LIMÃO"?*

R. Trata-se das possibilidades de trocas de letras em um conjunto de 5 letras. Assim, é permutação, e:

$$P = 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120\ maneiras\ de\ trocar\ as\ letras\ da\ palavra\ "LIMÃO"$$

Arranjo: são agrupamentos formados com p elementos de um total de n elementos, em que p é menor ou igual a n. No arranjo a ordem importa, pois ordens diferentes de elementos formam um novo conjunto (ex: 321, 132, 123 são conjuntos diferentes, embora com os mesmos elementos).

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

EX: *De quantas formas diferentes eu posso dispor 10 frutas em cestos de 3 frutas?*

R. $n = 10$ $\quad A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10*9*8*7!}{7!} = 10 * 9 * 8 = 720\ formas$

$p = 3$

Conjunto: a única diferença em relação ao arranjo é que a ordem não importa (os conjuntos 123 e 213 são o mesmo).

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

EX: *Quantos grupos de 3 alunos podem ser formados em uma turma de 20 alunos?*

R. $n = 20$ $\quad$ Reparem que a ordem não importa, pois se trocarmos a ordem dos

$p = 3$ $\quad$ mesmos alunos em um grupo, essa troca não formará um novo grupo.

$$A_{20,3} = \frac{20!}{3!\,(20-3)!} = \frac{20!}{3!\,17!} = \frac{20 * 19 * 18 * 17!}{3!\,17!} = \frac{20 * 19 * 18}{3!} = 1140\ grupos$$

Questão resolvida – Análise combinatória

(ENEM) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, dentre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

$A)\dfrac{10!}{2! \times 8!} - \dfrac{4!}{2! \times 2!}$

$B)\dfrac{10!}{8!} - \dfrac{4!}{2!}$

$C)\dfrac{10!}{2! \times 8!} - 2$

$D)\dfrac{6!}{4!} + 4 \times 4$

$E)\dfrac{6!}{4!} + 6 \times 4$ RESPOSTA: A

R. A ordem neste caso não importa, pois se o jogador A jogar com o B o grupo de tenistas será o mesmo. Então a questão trata de uma combinação.

Basta subtrair a combinação (10 tenistas em grupos de 2) pela combinação referente aos 2 canhotos (4 tenistas canhotos em grupos de 2).

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!}$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!}$$

Subtraindo: $\frac{10!}{2!(10-2)!} - \frac{4!}{2!(4-2)!}$

REFERÊNCIAS

MURÇA, Giovana. Esquenta Enem: O que mais cai na prova de matemática. **Quero Bolsa**, 2021. Disponível em: <https://querobolsa.com.br/revista/esquenta-enem-o-que-mais-cai-na-prova-de-matematica>. Acesso em: 10 de set. de 2021.

SCHUSTER, Ana Paula. Quais os principais assuntos de Matemática e suas Tecnologias para o Enem 2021. **Hora da Facul**, 2021. Disponível em: <https://horadafacul.vestibulares.com.br/enem/quais-os-principais-assuntos-de-matematica-e-suas-tecnologias-para-o-enem-2021/>. Acesso em: 10 de set. de 2021.

RAZÃO, Proporção e Porcentagem III. **Projeto Agatha**, © 2021. Disponível em: <https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-enem/matematica/razao-proporcao-e-porcentagem-3.php>. Acesso em: 10 de set. de 2021.

HENRY. ENEM 2020 Digital – Um agricultor sabe que a colheita da safra de soja. **Yes Matemática**, © 2021. Disponível em: <https://www.yesmatematica.com/enem-2020-digital-um-agricultor-sabe-que-a-colheita-da-safra-de-soja/>. Acesso em: 13 de set. de 2021.

Xeque Mat Enem. GEOMETRIA PLANA para o ENEM | Tudo que você precisa saber! [Parte 1]. Youtube, 08 jul. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=r_hTJyCHalk&t=991s>. Acesso em: 13 set. 2021.

Xeque Mat Enem. GEOMETRIA PLANA para o ENEM | Tudo que você precisa saber! [Parte 2]. Youtube, 15 jul. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=2-A8l8GVolE>. Acesso em: 14 set. 2021.

Xeque Mat Enem. GEOMETRIA PLANA para o ENEM | Tudo que você precisa saber! [Parte 3]. Youtube, 22 jul. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=UMB6HXbz8as&t=17s>. Acesso em: 22 jul. 2021.

ÁREA de Figuras Planas – Exercícios. **Toda Matéria**, 2021. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/area-de-figuras-planas-exercicios/>. Acesso em: 16 de set. de 2021.

Xeque Mat Enem. O que mais cai de TRIGONOMETRIA no Enem | 90% do conteúdo você resolve com isso!. Youtube, 15 abr. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=rL8qbAuvAVg>. Acesso em: 16 set. 2021

Matemática Pra Passar. ENEM: Como Aprender Geometria Espacial em 15 Minutos. Youtube, 25 mai. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=8ywIuVF2RfE>. Acesso em: 20 set. 2021.

Stoodi. MATEMÁTICA: GEOMETRIA ESPACIAL PARA O ENEM. Youtube, [s.d.]. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=GNfI5yjtjlE>. Acesso em: 20 set. 2021.

Pirâmides – revisão de Poliedros: Matemática no Enem. Veja!. **Blog do Enem**, 2021. Disponível em: <https://blogdoenem.com.br/piramide-matematica-enem/>. Acesso em: 21 de set. de 2021.

SILVA, Luis Paulo Moreira. Principais tópicos de Geometria para o Enem. **Uol**, © 2021. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/principais-topicos-geometria-para-enem.htm>. Acesso em: 21 de set. de 2021.

GEOMETRIA Espacial. **Projeto Agatha**, © 2021. Disponível em: <https://www.projetoagathaedu.com.br/questoes-enem/matematica/geometria-espacial.php>. Acesso em 27 de set. de 2021.

QUESTÕES de Geometria espacial | ENEM. **Matika**, 2021. Disponível em: <https://matika.com.br/vestibular/enem/geometria-espacial>. Acesso em: 27 de set. de 2021.

CORTÊS, Regis. Matemática Financeira no Enem. **Gênio da Matemática**, 2020. Disponível em: <https://geniodamatematica.com.br/matematica-financeira-no-enem/>. Acesso em: 27 de set. de 2021.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Funções no Enem. **Prepara Enem**, © 2021. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/enem/funcoes-no-enem.htm#:~:text=Entre%20os%20tipos%20de%20fun%C3%A7%C3%A3o,comportamento%20gr%C3%A1fico%20e%20valor%20num%C3%A9rico>. Acesso em: 28 de set. 2021.

NOÉ, Marcos. Função do 1º Grau. **Prepara Enem**, © 2021. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/matematica/funcao-.htm>. Acesso em: 28 de set. de 2021.

SILVA, Luis Paulo Moreira. Função do 2º grau. **Prepara Enem**, © 2021. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/matematica/funcao-do-2-grau.htm>. Acesso em: 28 de set. de 2021.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Função exponencial. **Prepara Enem**, © 2021. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/matematica/funcao-exponencial.htm>. Acesso em: 01 de out. de 2021.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Função logarítmica. **Prepara Enem**, © 2021. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/matematica/funcao-logaritmica.htm>. Acesso em: 01 de out. de 2021.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Estatística no Enem. **Prepara Enem**, © 2021. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/enem/estatistica-no-enem.htm>. Acesso em: 04 de out. de 2021.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. Média, Mediana e Moda no Enem. **Uol**, 2014. Disponível em: <https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/media-mediana-moda-no-enem.htm#:~:text=Dada%20uma%20sequ%C3%AAncia%20de%20valores,Moda%3A&text=Dado%20um%20conjunto%20de%20valores,n%C3%BAmero%20que%20mais%20se%20repete>. Acesso em: 04 de out. de 2021.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. Probabilidade no Enem. **Uol**, 2014. Disponível em: <https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/enem/probabilidade-no-enem.htm>. Acesso em: 05 de out. de 2021.

OLIVEIRA. Raul Rodrigues de. Probabilidade condicional. Uol, © 2021. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/probabilidade-condicional.htm>. Acesso em 05 de out. de 2021.

RIGONATTO, Marcelo. Probabilidade de eventos simultâneos. **Uol**, © 2021. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/probabilidade-eventos-simultaneos.htm>. Acesso em: 05 de out. de 2021.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Análise combinatória no Enem. Prepara Enem, © 2021. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/enem/analise-combinatoria-no-enem.htm>. Acesso em: 05 de out. de 2021.

QUINELATO, Rosangela. Questão comentada sobre rotação de parábola, do Enem 2013. **Blog do Vestibular**, 2016. Disponível em: <https://www.blogdovestibular.com/questoes/questao-comentada-sobre-rotacao-de-parabola-do-enem-2013.html>. Acesso em: 05 de out. de 2021.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. EXERCÍCIOS SOBRE FUNÇÃO DO 1º GRAU. **Uol**, © 2021. Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-funcao-1-o-grau.htm>. Acesso em: 05 de out. de 2021.

QUESTÕES de Matemática financeira | ENEM. **Matika**, [s.d.]. Disponível em: <https://matika.com.br/vestibular/enem/matematica-financeira>. Acesso em: 05 de out. de 2021.

Matemática Rio com Prof. Rafael Procopio. 🔥 ENEM 2017 Matemática #01 👉 Expressão Algébrica para Juros Compostos. Youtube, 18 nov. 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=tqtWDnuvOMA>. Acesso em: 05 out. 2021.

Matemática Rio com Prof. Rafael Procopio. ENEM 2015 Matemática #21 - Cálculo de Juros sobre Saldo Devedor na Prestação de uma Casa. Youtube, 21 jan. de 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=uS5qiWkbLa8>. Acesso em 05 out. 2021.

Ferretto Matemática. 🔵 QUESTÃO 168 (PROVA AMARELA) - Matemática ENEM 2020: Loja de Materiais. Youtube, 06 abr. 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=__jYD2cU0-k>. Acesso 05 out. 2021.

Matemática Rio com Prof. Rafael Procopio. ENEM 2014 Matemática #15 - Planificação de Bagagem de Mão em Viagens Aéreas. Youtube, 30 out. 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=dO4Qysn4P7c>. Acesso em 05 out. 2021.

Matemática Rio com Prof. Rafael Procopio. ENEM 2015 Matemática #20 - Área do Círculo e Antenas de Transmissão. Youtube, 12 jan. 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=bmhSBmYhqKU>. Acesso em: 05 out. 2021.

Matemática Rio com Prof. Rafael Procopio. ENEM 2016 Matemática #08 - Área e Equação Quadrática (com dica matadora). Youtube, 25 nov. 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=VYfSOziPzf4>. Acesso em: 05 out. 2021.

Matemática Rio com Prof. Rafael Procopio. 🔥 ENEM 2018 Matemática 170 👉 Trigonometria e Altura da Roda Gigante High Roller. Youtube, 16 mai. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=J4TlRilPAYE>. Acesso em: 05 out. 2021.

Parabéns por ter chegado até aqui!

Agora que você já aprendeu as melhores técnicas de **Matemática**,

que tal aprofundar seus estudos em **Geografia** para mandar bem no ENEM?!

Te vejo no próximo e-book, até mais!